Clase 9

Ley de Gauss

Cálculo de campo eléctrico usando la ley de Gauss

Ejemplo 20: Consideremos una distribución esférica de carga con radio R y una densidad variable $\rho(r) = Ar^2$ donde r es la distancia del punto al centro de la esfera. ¿Cuanto vale el campo en cualquier punto del espacio?

Para puntos $r > R$ por las discusiones previas sabemos que el campo sera el campo de una carga puntual en el origen con carga igual a la carga total de la distribución. Si $V(R)$ es el volumen de la distribución de carga, la carga total es

$$Q = \int_{V(R)} \rho(r) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} (Ar^2) r^2 sen(\theta) dr d\theta d\phi$$

Las integrales en las variables angulares como siempre que hay simetría esférica valen 4π y la integral radial se calcula fácilmente. Con este resultado el campo eléctrico para $r > R$ vale

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad , \quad Q = 4\pi \frac{AR^5}{5} \quad , \quad r > R$$

Para $r < R$ consideramos una superficie gaussiana esférica de radio r. Por la simetría esférica el flujo a través de esa superficie vale $\Phi = E(r) 4\pi r^2$. Aplicando la ley de Gauss tenemos

$$\begin{aligned} E(r) 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} (Ar^2) r^2 sen(\theta) dr d\theta d\phi \\ &= 4\pi \frac{Ar^5}{5\epsilon_0} \quad . \end{aligned}$$

El campo eléctrico para $r < R$ resulta

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{A}{\epsilon_0} \frac{r^3 \hat{\mathbf{r}}}{5} \quad , \quad r < R$$

Campo electrico dentro de huecos en distribuciones simétricas

Para una distribución superficial esféricamente simétrica es fácil darse cuenta por consideraciones de simetria que el campo eléctrico es cero en el centro del la esfera. ¿Que pasa en otros puntos dentro de la esfera? Ahi puede pensarse que hay dos contriuciones que apuntan en direccione opuestas. Las cargas mas cercanas producen un camo que apunta en una dirección mientras que el campo del resto de la esfera apunta en la direccion opuesta. La ley de Gauss permite que nos demos cuenta (tomando como superficies gaussianas esferas concéntricas) que el campo eléctrico es en realidad cero.

El mismo resultado se obtiene si consideramos una distriución volumétrica de carga con simetria esfeérica y un hueco esférico alrededor del centro. Tamién es cero el campo dentro de un cascarón cilíndrico infinito con carga superficial uniforme o dentro de un hueco cilindrico coaxial al eje de simetría dentro de una distribución volumétrica dcon simetría cilíndrica.

Ejemplo 21: Consideremos una distribución de carga variable $\rho(r) = K/r_\rho^2$ que rellena un cilndro hueco de radio interior a y radio exterior b. Naturalmente r_ρ es la distancia del punto al eje del cilindro. ¿Cuanto vale el campo en cualquier punto del espacio?

Por la simetria del problema vemos que el campo debe ser radial en cada plano perpendicular al cilindro. Para puntos $r_\rho > b$ por las discusiones previas esperamos que el campo se comporte como el campo de un hilo de carga sobre el eje con carga por unidad de longitud igual a la carga por unidad de lomgitud de la distribución. La carga por unidad de longitud se calcula integrando la desidad de carga en un porción del cilindro de longitud L.

$$Q_L = \int_{V(L)} \rho(r_\rho) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_a^R \frac{K}{r_\rho^2} r_\rho dr_\rho dz d\phi = KL2\pi \ln \frac{b}{a} \ .$$

Podemos definir la densidad lineal de carga de la distribución como $\lambda = Q_L/L$. Para calcular el campo eléctrico en la region fuera del cilindro consideramos una superficie gaussiana de radio $r_\rho > b$. Entonces en cada punto de la superficie el campo es paralelo al vector $d\vec{\mathbf{S}}$ y la ley de Gauss dice que

$$2\pi r_\rho L E(r_\rho) = \frac{Q_L}{\epsilon_0} \quad , \quad E(r_\rho) = \frac{Q_L}{2\pi L r_\rho \epsilon_0}$$

que vemos corresponde al campo de un hilo infinito de densidad lineal λ.

El campo dentro cualquier punto del hueco del cilindro se encuentra que es cero tomando una superficie gaussiana cilíndrica de radio $r_\rho < a$ que por lo tanto no contiene carga. La ley de Gauss nos permite entonces mostrar que el campo se anula.

Para calcular el campo dentro de la distribución de carga tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio $a < r_\rho < b$. La carga contenida será $Q_{contenida} = KL2\pi \ln \frac{r_\rho}{a}$. Por la ley de Gauss

$$E(r_\rho) = \frac{Q_{contenida}}{2\pi L r_\rho \epsilon_0} = \frac{KL2\pi \ln \frac{r_\rho}{a}}{2\pi L r_\rho \epsilon_0}$$

Notamos que para $r_\rho = a$ el campo se anula en esta expresion por lo que verificamos que es continuo. Igualmente podemos comprobar queel campo es continuo en $r_\rho = b$.

Ley de Gauss y Conductores

Conductores y aislantes

Como ya hemos mencionado la naturaleza del enlace metálico permite que en ciertos materiales parte de los electrones se encuentren básicamente deslocalizados siendo compartidos por los iones de la red. Estas cargas presentan una alta movilidad dentro del material y sin embargo están confinadas al material porque la fuerza de atracción electrostática de los iones de la red previene que puedan ser arrancados. Estos materiales se llaman conductores porque al someterlos a la acción de un campo eléctrico las cargas en movimiento establece establecen corrientes eléctricas. Se dice entonces que conducen corriente eléctrica. Además es fácil en estos materiales colocar un exceso de carga, ya sea negativa implantando electrones adicionales o positiva retirando electrones del material. Esta carga en exceso se reacomoda dentro del material hasta que el sistema llega a un equilibrio. En contraposición en los materiales que no conducen corrientes eléctricas, llamados aislantes, las cargas eléctricas no tienen movilidad.Cuando se implanta un exceso de carga en un material aislante la carga permanece básicamente en la posición en la cual se le coloca. Los materiales conductores y aislantes descritos aquí son idealizaciones de los materiales reales. Los materiales reales no son ni conductores perfectos ni aislantes perfectos sino que tienen comportamientos intermedios dependiendo de la intensidad de los campos que actúan sobre ellos.

Cargas en Conductores Las observaciones primordiales aquí son las siguientes:

- Para un conductor en equilibrio el campo eléctrico dentro del conductor es cero.
- Para un conductor en equilibrio el campo eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular a la superficie

Ambas condiciones son necesarias para garantizar que el sistema esté en equilibrio. Si no se cumplen las cargas sentirían fuerzas no compensadas que las inducirían a moverse por lo que el sistema no permanecería en equilibrio.

Considerando una superficie gaussiana en el interior de un material conductor,la ley de Gauss nos dice que la carga encerrada en ella cualquiera que sea su forma o tamaño es cero. Deducimos entonces que todo exceso de carga en un material conductor se encuentra en las superficie del mismo.

Tomamos ahora como superficie gaussiana un pequeño cilindro con su superficie cilíndrica perpendicular a la superficie con una de las tapas apenas afuera sobre la superficie y la otra adentro del material. La observación de que el campo también es perpendicular a la superficie nos informa que el flujo es no nulo sólo sobre la tapa externa donde vale EA, siendo A el área de esta tapa. La carga contenida es σA. La Ley de Gauss establece entonces que el campo justo encima de la superficie de un conductor toma el valor $E = \sigma A/\epsilon_0$.